PART2 無限等比級数の収束と発散

要点整理と公式

要点① 無限等比級数の収束と発散

初項 a，公比 r の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ からつくられる無限級数

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

を，初項 a，公比 r の「　　　　　　　　」という。

無限等比級数の収束，発散について考える。①の第 n 項までの部分和を S_n とする。

$a=0$ のとき，$S_n=0$ であるから，無限等比級数①は収束し，その和は 0 である。

$a\neq 0$ のとき

$r=1$ のとき $S_n=a+a+a+\cdots\cdots+a=na$

$a\neq 0$ であるから，数列 $\{S_n\}$ は発散する。

よって，無限等比級数①は発散する。

$r\neq 1$ のとき $S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$

よって，無限等比級数①は収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r|>1$ または $r=-1$ のとき，数列 $\{r^n\}$ は正の無限大に発散または振動するから，数列 $\{S_n\}$ は発散する。

よって，無限等比級数①は発散する。

以上より，次のことが成り立つ。

無限等比級数の収束と発散

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ の収束・発散は

$a\neq 0$ のとき

$|r|$ 　 1 ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r|$ 　 1 ならば発散する。

$a=0$ のとき 　　 収束し，その和は 0 である。

(ex) 無限等比級数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ は，初項　，公比　　であり，　　　で

あるから この無限等比級数は収束し，その和は $\frac{\quad}{1-\quad}=\frac{2}{3}$

無限等比級数 $3+2\sqrt{3}+4+\frac{8\sqrt{3}}{3}+\cdots\cdots$ は，初項 3，公比 $\frac{\quad}{\quad}=$　　であり，

　　であるから，この無限等比級数は発散する。

要点 ② 無限等比級数の収束条件

無限等比級数の収束・発散の整理から，次のことがわかる。

無限等比級数の収束条件

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ が収束するための

必要十分条件は $a=0$ または $|r|<1$

(ex) 無限等比級数 $1+3x+9x^2+27x^3+\cdots\cdots$ が収束するような x の値の範囲

この無限等比級数の初項は 1，公比は $3x$ であるから，収束する条件は

$-1<3x<1$　　よって $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

2 (1) 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

(i) $-2+3-\dfrac{9}{2}+\cdots\cdots$　　(ii) $(3+\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$

(2) 次の無限等比級数が収束するような x の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

$$x+x(1-x)+x(1-x)^2+\cdots\cdots$$

Point Pickup

無限等比級数の収束と発散

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ の収束・発散は

$a\neq 0$ のとき

$|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$　　$|r|\geqq 1$ ならば発散

$a=0$ のとき　　収束し，その和は 0

無限等比級数の収束条件

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ の収束条件は $a=0$ または $|r|<1$

第 4 講 PART2 確認問題

1 次の無限等比級数は収束するか発散するか，下の①，②のうちから選んで答えよ。

$9-12+16-\cdots\cdots$

[ア]

① 収束する　② 発散する

2 次の無限等比級数は収束するか発散するか，下の①，②のうちから選んで答えよ。また，その和を求めよ。

$\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})+(4\sqrt{3}-6)+\cdots\cdots$

[イ]

① 収束する　② 発散する

その和は，[ウ]$\sqrt{[エ]}$＋[オ]

3 無限等比級数 $x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots\cdots$ について，

収束するような x の値の範囲は，

$-$[カ]$<x\leqq$[キ] であり，

その和は，

$x=$[キ] のとき，[ク]

$-$[カ]$<x<$[キ] のとき，[ケコ]

である。

PART2 無限等比級数の収束と発散

2 (1) 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

(i) $-2+3-\dfrac{9}{2}+\cdots\cdots$　　(ii) $(3+\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$

(2) 次の無限等比級数が収束するような x の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

$$x+x(1-x)+x(1-x)^2+\cdots\cdots$$

[解答]

(1)(i) 初項は -2，公比は $-\dfrac{3}{2}$ で，$\left|-\dfrac{3}{2}\right| \geqq 1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(ii) 初項は $3+\sqrt{2}$，公比は $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{(1-2\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\dfrac{7-7\sqrt{2}}{7}=1-\sqrt{2}$ で，

$|1-\sqrt{2}|<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和は

$$\frac{3+\sqrt{2}}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

(2) 初項は x，公比が $1-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための条件は

$x=0$ または $-1<1-x<1$

$-1<1-x<1$ より $-2<-x<0$ つまり $0<x<2$

よって，求める x の範囲は $0 \leqq x<2$

また，求める和は

$x=0$ のとき 0　　$0<x<2$ のとき $\dfrac{x}{1-(1-x)}=1$

第 4 講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

初項は 9，公比は $-\dfrac{4}{3}$ で，

$\left|-\dfrac{4}{3}\right| \geqq 1$ であるから，

この無限等比級数は，**発散する**。[A]

> [A] 無限等比級数の収束と発散
> 無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots$
> $\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ において，
> ① $a \neq 0$ のとき
> $|r|<1$ ならば収束し，
> その和は，$\dfrac{a}{1-r}$
> $|r| \geqq 1$ ならば，発散
> ② $a=0$ のとき
> 収束し，その和は 0

2

[正解] イ：①，ウ：2，エ：3，オ：3

[解説]

初項は $\sqrt{3}$，公比は $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

$|\sqrt{3}-1|<1$ であるから，

この無限等比級数は，**収束する**。

その和は，

$$\frac{\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3}{4-3}=\mathbf{2\sqrt{3}+3}$$

3

[正解] カ：2，キ：0，ク：0，ケコ：-1

[解説]

初項は x，公比は $x+1$ であるから，この無限等比級数が収束するための条件は，

$x=0$

または $-1<x+1<1$　……①　[B]

①より，$-2<x<0$

よって，求める x の値の範囲は，

$\boldsymbol{-2<x\leqq 0}$

$x=0$ のとき，和は，**0**　[C]

$-2<x<0$ のとき，和は，

$$\frac{x}{1-(x+1)}=\frac{x}{-x}=\boldsymbol{-1}$$

[B]　無限等比級数の収束条件
無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots$ の収束条件は，
$a=0$ または $|r|<1$

[C]　(初項)$=0$ と(初項)$\neq 0$ の場合に分けて和を求める。